ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH MINH THƯỜNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU HAI CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRỊNH MINH THƯỜNG

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU HAI CẤP

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Danh mục các hình vẽ

Mở đầu

Luận văn đề cập tới bài toán tối ưu hai cấp (viết tắt là BPP) có dạng:

$$\min\{F(x,y) \mid x \in X,\, G(x,y) \leq 0,\, y \in \arg\min\{f(x,y) \mid y \in Y,\, g(x,y) \leq 0\}\},$$

trong đó $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m,\ F,\ G,\ f,\ g\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$. Đây là một bài toán qui hoạch toán học theo hai nhóm biến $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$ và trong ràng buộc của bài toán này, y là nghiệm của bài toán tối ưu thứ hai (với y là véctơ biến và x là véctơ tham số).

Như vậy có thể hiểu đơn giản tối ưu hai cấp là bài toán tối ưu mà trong ràng buộc của nó lại là một bài toán tối ưu khác. Bài toán tối ưu hai cấp xuất hiện trên sách báo, tạp chí có liên quan tới các hệ thống có sự phân cấp, trong thực tế tối ưu hai cấp nảy sinh từ nhiều ứng dụng đa dạng trong hoạt động vận tải, kinh tế, sinh thái học, kỹ thuật, … Bài toán tối ưu hai cấp hiện đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, do ý nghĩa khoa học và khả năng ứng dụng của bài toán.

Tối ưu hai cấp được phân ra thành: các bài toán hai cấp một mục tiêu (được nghiên cứu và ứng dụng nhiều hơn) và bài toán hai cấp nhiều mục tiêu (khó ứng dụng hơn do ít có thuật toán hiệu quả). Khi các hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc trong bài toán là các hàm tuyến tính, thì ta có bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính.

Tối ưu hai cấp là một bài toán NP - khó và thuộc lớp các bài toán tối ưu toàn cục, nói chung rất phức tạp và khó giải. Nói riêng nó bao hàm bài toán tối ưu trên tập nghiệm hữu hiệu (tập điểm Pareto) như một trường hợp cụ thể. Nhiều phương pháp xử lý đã được đề xuất, tuy nhiên hiệu quả không cao và chủ yếu đối với các bài toán hai cấp tuyến tính với một hay nhiều mục tiêu.

Đề tài luận văn

"Một số tính chất của bài toán tối ưu hai cấp"

có mục đích tìm hiểu và trình bày nội dung, nguồn gốc của bài toán tối ưu hai cấp, các dạng bài toán tối ưu hai cấp và các tính chất cần biết của bài toán, đặc biệt lưu ý trường hợp riêng quan trọng là bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính, nhằm giúp việc học tập, nghiên cứu bài toán tối ưu hai cấp được thuận lợi và dễ dàng hơn. Cuối cùng, luận văn giới thiệu một số hướng ứng dụng của tối ưu hai cấp trong thực tế.

Nội dung luận văn gồm ba chương:

Chương 1. "Kiến thức chuẩn bị” nhắc lại một số kiến thức về tập lồi đa diện, khái niệm nghiệm hữu hiệu (điểm tối ưu Pareto) của bài toán tối ưu đa mục tiêu và tính chất đặc trưng đối với đỉnh và cạnh hữu hiệu của bài toán tối ưu tuyến tính đa mục tiêu.

Chương 2. "Bài toán tối ưu hai cấp" giới thiệu khái quát nội dung, xuất xứ của bài toán tối ưu hai cấp, các tính chất cần biết của bài toán, đặc biệt lưu ý tới trường hợp riêng quan trọng là bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính một mục tiêu. Cuối chương, đề cập tới một số hướng ứng dụng của tối ưu hai cấp trong thực tế.

Chương 3. "Tối ưu hai cấp tuyến tính và tối ưu đa mục tiêu" xét mối liên hệ giữa bài toán tối ưu hai cấp tuyến tính và bài toán tối ưu tuyến tính trên tập nghiệm hữu hiệu. Có thể mô tả bài toán này dưới dạng bài toán kia, và ngược lại, Từ đó suy ra hệ quả là bài toán tối ưu tuyến tính trên tập nghiệm hữu hiệu là NP - khó.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự giúp đỡ và hướng dẫn tận tình của GS.TS. Trần Vũ Thiệu. Qua đây tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy, người đã dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và tạo điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian làm luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các GS, PGS, TS của Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên và của Viện Toán học, Viện Công nghệ thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2016

Học viên

Trịnh Minh Thường

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhắc lại một số kiến thức về tập lồi và tập đa diện, khái niệm nghiệm hữu hiệu (điểm tối ưu Pareto) của bài toán tối ưu tuyến tính đa mục tiêu và nêu lại các tính chất đặc trưng của đỉnh và cạnh hữu hiệu của bài toán. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [7] và [9].

1.1 Tập lồi và tập lồi đa diện

Trước hết ta nhắc lại khái niệm tập lồi trong $\mathbb{R}^n$ và các khái niệm có liên quan.

Định nghĩa 1.1. Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi* nếu $\lambda a + (1-\lambda)b \in C$ $\forall a,\, b \in C, \forall \lambda \in [0,1]$, tức là C chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó.

• Ta chú ý tới một số tập lồi đặc biệt sau:

a) Tập *afin* là tập chứa trọn đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ thuộc nó.

b) Siêu phẳng là tập có dạng $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a^T x = \alpha\}$, $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

c) Các nửa không gian đóng

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a^T x \geq \alpha\},$$
$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \colon a^T x \leq \alpha\}.$$

• Từ định nghĩa tập lồi trực tiếp suy ra một số tính chất đơn giản sau:

a) Giao của một họ bất kỳ các tập lồi là một tập lồi: $C,\ D$ lồi thì $C \cap D$ lồi.

b) Nếu $C,\ D \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi thì $C \pm D = \{x \pm y \colon x \in C, y \in D\}$ là các tập lồi.

c) Nếu $C \in \mathbb{R}^m, D \in \mathbb{R}^n$ thì tích $C \times D = \{(x, y) \colon x \in C, y \in D\}$ là một tập lồi trong $\mathbb{R}^{m+n}$. (Có thể mở rộng cho nhiều tập lồi).

Định nghĩa 1.2. Cho E là một tập hợp bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$.

a) Giao của tất cả các tập afin chứa E gọi là *bao afin* của E, ký hiệu là aff E.

b) Giao của tất cả các tập lồi chứa E gọi là *bao lồi* của E, ký hiệu là conv E.

Định nghĩa 1.3. a) *Thứ nguyên* (hay *số chiều*) của một tập afin M, ký hiệu dim M, là thứ nguyên (số chiều) của không gian con song song với nó.

b) *Thứ nguyên* (hay *số chiều*) của một tập lồi C, ký hiệu dim C, là thứ nguyên hay số chiều của bao afin aff C của nó.

Định nghĩa 1.4. Tập lồi $K \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *nón lồi* nếu K có thêm tính chất $\lambda x \in K$ với mọi $x \in K$ và mọi $\lambda > 0$.

Định nghĩa 1.5. Một tập con lồi F của tập lồi C được gọi là một *diện* của C nếu $x, y \in C$ mà $(1 - \lambda)x + \lambda y \in F,\ 0 < \lambda < 1$ thì $[x, y] \subset F$, tức nếu một đoạn thẳng bất kỳ thuộc C có một điểm trong thuộc F thì cả đoạn thẳng ấy phải nằm trong F.

Một diện có số chiều 0 gọi là một *điểm cực biên* của C. Nói một cách khác, đó là một điểm thuộc C mà nó không thể là một điểm trong của một đoạn thẳng bất kỳ nào với hai đầu mút khác nhau thuộc C.

Một diện có số chiều 1 gọi là một *cạnh của* C: cạnh là *hữu hạn* nếu diện đó là một đoạn thẳng, cạnh là *vô hạn* nếu diện đó là một nửa hay cả đường thẳng.

Một diện của C, khác $\varnothing$ và khác C, gọi là một *diện thực sự* của C. Ví dụ: các diện thực sự của một hình lập phương trong $\mathbb{R}^3$ là 8 đỉnh, 12 cạnh và 6 mặt của nó.

Định nghĩa 1.6. Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng gọi là một *tập lồi đa diện*, ký hiệu là D. Nói cách khác, D là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các phương trình và (hoặc) bất phương trình tuyến tính.

Một tập lồi đa diện có thể bị chặn hoặc không bị chặn (không giới nội). Một tập lồi đa diện bị chặn còn được gọi là một *đa diện lồi*. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong mặt phẳng hai chiều (tam giác, hình vuông, hình tròn,...) là những ví dụ cụ thể về đa diện lồi trong $\mathbb{R}^2$.

Tập lồi đa diện mà đồng thời là một nón, còn được gọi là một *nón lồi đa diện*. Mỗi điểm cực biên của tập lồi đa diện được gọi là một *đỉnh* của tập đa diện đó.

Định nghĩa 1.7. Đoạn thẳng $[x^1,\, x^2]$, $x^1 \neq x^2$, được gọi là một *cạnh hữu hạn* của D nếu x^1, x^2 là các đỉnh của D và rank $\{a^i\colon \left\langle a^i, x^1\right\rangle = \left\langle a^i, x^2\right\rangle = b^i\} = n-1$.

Định nghĩa 1.8. Tia $\Gamma = \{x^0 + \lambda d\colon \lambda \geq 0\} \subseteq D$, trong đó $x^0 \in D$, $d \in \mathbb{R}^n$, được gọi là một *cạnh vô hạn* của D nếu

$$\text{rank}\,\{a^i\colon \left\langle a^i, x\right\rangle = b_i,\, \forall x \in \Gamma\} = n-1.$$

Để hiểu rõ hơn về tập lồi đa diện ta cũng cần biết một số khái niệm sau đây.

Trong các bài toán tối ưu, ta thường gặp tập lồi đa diện có dạng

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n\colon Ax \leq b,\, x \geq 0\} \text{ với } A \in \mathbb{R}^{m\times n},\, b \in \mathbb{R}^m\},$$

tức D là tập nghiệm không âm của một hệ (hữu hạn) bất phương trình tuyến tính.

Tập này không chứa đường thẳng nào (do $x \geq 0$) nên D có đỉnh. Từ các định nghĩa nêu trên cho thấy:

a) Điểm $x^0 \in D$ là một đỉnh của D khi và chỉ khi hệ véctơ

$$\{a^k\colon \left\langle a^k, x^0\right\rangle = b_k\} \cup \{e^k\colon x^0_k = 0\}$$

có hạng bằng n.

b) Các hướng cực biên (chuẩn hóa) của D là các nghiệm cơ sở của hệ $Ay \leq 0$, $e^T y = 1$, $y \geq 0$, trong đó $e^T = (1, \ldots, 1)$.